

(Đề thi có 04 trang)

Họ và tên: Số báo danh: Phòng:

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

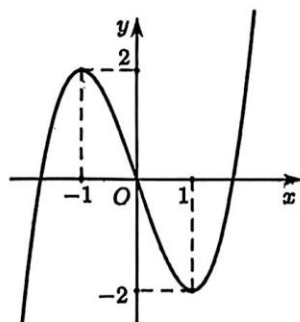
Câu 1. Một trạm y tế ghi nhận số phút tập thể dục mỗi ngày của 60 người trưởng thành trong một khu dân cư. Kết quả được ghi lại và lập thành bảng ghép nhóm sau:

Thời gian (phút)	$[0;15)$	$[15;30)$	$[30;45)$	$[45;60)$	$[60;75)$
Số người	8	12	18	14	8

Mốt của mẫu số liệu ghép nhóm trên thuộc nhóm nào sau đây?

- A. $[15;30)$. B. $[0;15)$. C. $[30;45)$. D. $[45;60)$.

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Giá trị cực đại của hàm số là

- A. -1. B. 1. C. -2. D. 2.

Câu 3. Cho tứ diện $ABCD$ có G là trọng tâm của tam giác BCD . Đẳng thức nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$. B. $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$.
C. $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$. D. $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$.

Câu 4. Cho tứ diện $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng đáy (ABC) . Khẳng định nào sau đây là sai?

- A. $SA \perp AC$. B. $SA \perp SB$. C. $SA \perp BC$. D. $SA \perp AB$.

Câu 5. Trên bảng điều khiển con tàu có 6 nút bấm khác nhau. Robot cần nhấn lần lượt 3 nút để kích hoạt hệ thống phòng thủ. Có bao nhiêu mã lệnh khác nhau có thể tạo ra?

- A. 120. B. 20. C. 18. D. 216.

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 8z - 6 = 0$ có bán kính bằng

- A. 9. B. $3\sqrt{3}$. C. 6. D. 3.

Câu 7. Nghiệm của phương trình $2^{x+3} = 2^5$ là

- A. $x = 2$. B. $x = 0$. C. $x = 3$. D. $x = 1$.

Câu 8. Cho $f(x)$ là một hàm số liên tục trên đoạn $[a; b]$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $2 \int_a^b f(x) dx = \int_{2a}^{2b} f(x) dx$. B. $\int_a^b f(x) dx = \int_c^a f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$.
C. $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$. D. $\int_a^b f(x) dx = - \int_{-a}^{-b} f(x) dx$.

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x - 3y + z - 5 = 0$. Vector nào sau đây là vector pháp tuyến của mặt phẳng (P) ?

- A. $\vec{n} = (2; 3; 1)$. B. $\vec{n} = (2; -3; -5)$. C. $\vec{n} = (-2; -3; -1)$. D. $\vec{n} = (-2; 3; -1)$.

Câu 10. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_3 = 5$ và $u_4 = 7$. Công sai của cấp số cộng đó bằng

- A. 2. B. 12. C. -12. D. -2.

Câu 11. Thể tích của khối tròn xoay được tạo bởi phép quay quanh trục Ox hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{x}$, trục hoành, $x = 0$ và $x = 4$ là

- A. 8π . B. 4π . C. 4. D. 8.

Câu 12. Đồ thị của hàm số $y = 2x + 1 - \frac{1}{x+3}$ có phương trình đường tiệm cận xiên là

- A. $x + 3 = 0$. B. $y = 2x + 1$. C. $y = \frac{1}{x+3}$. D. $y = 2$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1. Tốc độ thay đổi dòng tiền (triệu đồng/tháng) của một dự án khởi nghiệp được mô tả bởi hàm số $f(t) = t^2 + at + b$, với t là số tháng tính từ lúc bắt đầu ($t = 0$). Tại tháng thứ 3 ($t = 3$), tốc độ dòng tiền bằng 0. Biết rằng sau 3 tháng đầu tiên, tổng dòng tiền tích lũy của dự án quay về mức 0 (hòa vốn tạm thời), và trong giai đoạn dự án bị thâm hụt tốc độ dòng tiền không dương.

a) Trong giai đoạn dự án bị thâm hụt, tổng số tiền bị thâm hụt là 2 triệu đồng.

b) $f(3) = 0$.

c) Hàm mô tả tốc độ dòng tiền là $f(t) = t^2 - 4t + 3$.

d) Gọi tổng dòng tiền tích lũy của dự án sau t tháng là $F(t)$. Khi đó: $F(t) = \int_0^t f(x) dx$.

Câu 2. Cho hàm số $f(x) = 2 \sin x - x$ trên đoạn $[-\pi; \pi]$.

a) Phương trình $f'(x) = 0$ có hai nghiệm trên đoạn $[-\pi; \pi]$.

b) Khoảng cách giữa hai điểm cực trị của đồ thị hàm số trên đoạn $[-\pi; \pi]$ là 2,5 (kết quả làm tròn đến hàng phần mười).

c) Hàm số đã cho có đạo hàm là $f'(x) = 2 \cos x - 1$.

d) Điểm cực đại của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[-\pi; \pi]$ là $x = -\frac{\pi}{3}$.

Câu 3. Các nhà khoa học thử nghiệm một loại xét nghiệm để phát hiện virus X-Omega. Tuy nhiên, bộ xét nghiệm này không chính xác hoàn toàn. Theo thống kê tại khu vực nghiên cứu:

+ Tỷ lệ người thực sự nhiễm virus là 10%;

+ Nếu một người nhiễm virus, xét nghiệm sẽ cho dương tính với xác suất 95%.

+ Nếu một người không nhiễm virus, xét nghiệm vẫn có thể cho dương tính giả với xác suất 5%.

Chọn ngẫu nhiên một người trong khu vực nghiên cứu.

a) Xác suất người được chọn xét nghiệm ra kết quả dương tính là 0,25.

b) Xác suất người được chọn xét nghiệm ra kết quả âm tính, biết rằng người đó nhiễm virus, bằng 0,05

c) Xác suất người được chọn nhiễm virus, biết rằng người đó nhận được kết quả xét nghiệm là dương tính, bằng 0,38.

d) Xác suất người được chọn không nhiễm virus là 0,9.

Câu 4. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, xét mô hình phòng không như sau: Radar đặt tại gốc tọa độ $O(0;0;0)$, tên lửa đặt tại điểm $A(0;100;0)$; mỗi đơn vị tương ứng với $10m$; mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất; giả sử mọi máy bay không người lái và tên lửa đều chuyển động thẳng đều. Tại thời điểm $t = 0$ giây, radar phát hiện ra máy bay ở tọa độ $M_0(12000;0;40)$; tại thời điểm $t = 1$ giây radar theo dõi thấy máy bay ở tọa độ $M_1(11990;20;38)$.

a) Tại thời điểm 6 giây, máy bay đang ở vị trí $M_6(11940;120;28)$.

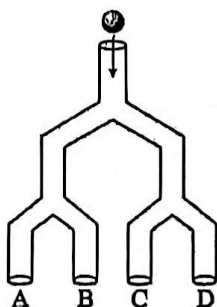
b) Tại thời điểm $t = 6$ giây, một tên lửa được phóng lên và chuyển động thẳng đều với vận tốc $3200m/s$, va chạm và phá hủy máy bay không người lái tại điểm B . Khi đó, sau 30 giây kể từ lúc phóng tên lửa thì tên lửa va chạm với máy bay không người lái.

c) Quỹ đạo đường bay của máy bay có phương trình là
$$\begin{cases} x = 12000 - 10t \\ y = 20t \\ z = 40 - 2t \end{cases}.$$

d) Khoảng cách từ vị trí tên lửa A đến máy bay tại thời điểm $t = 6$ giây là 11940 mét (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1. Hình bên dưới là một máy trò chơi được đơn giản hóa. Khi thả một quả bóng từ cửa vào, bóng sẽ đi qua đúng một trong bốn vị trí A, B, C, D . Mỗi khi bóng đi qua vị trí nào thì đèn ở vị trí đó sẽ đổi trạng thái: đang tắt thì bật, đang bật thì tắt.



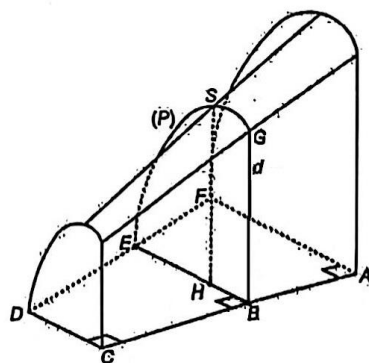
Ví dụ: Nếu ban đầu tắt cả đèn đều tắt, thả bóng 2 lần mà cả 2 lần đều đi qua A thì đèn ở A sẽ bật rồi lại tắt; còn nếu lần 1 bóng đi qua A rồi lần 2 bóng đi qua B thì đèn ở A và B đều bật.

Cứ như vậy, mỗi lần bóng đi qua thì đèn đổi trạng thái. Trò chơi kết thúc khi cả bốn đèn A, B, C, D đều bật.

Gọi xác suất để trò chơi kết thúc đúng ở lần thả bóng thứ 6 là $\frac{a}{b}$ ($\frac{a}{b}$ là phân số tối giản). Giá trị của $a+b$

là bao nhiêu? (Biết rằng ban đầu tắt cả đèn đều tắt, tại mỗi ngã rẽ, bóng đi sang hai hướng với xác suất bằng nhau).

Câu 2. Một đường hầm hiện đại được thiết kế với mặt đáy là hình thang $ACDF$ vuông tại A và C ($AF \parallel CD$). Xét một thiết diện bất kì của đường hầm vuông góc với AC là một hình phẳng giới hạn bởi đường cong (P) , đoạn BE và đoạn BG như hình vẽ (G thuộc (P)). Giả sử (P) là một nhánh của parabol có đỉnh S và hình chiếu của S trên mặt nền là H , E là chân của parabol (E thuộc (P) và mặt đáy) thì $SH = 2EH$. Một mặt bên đường hầm có dạng mặt phẳng vuông góc với mặt đáy chứa đường thẳng AC , gọi B là hình chiếu vuông góc của G xuống mặt phẳng đáy thì $BE = BG$ và B thuộc đoạn AC . Biết $AC = 30m$, $AF = 2CD = 12m$. Thể tích đường hầm trên bằng bao nhiêu mét khối?



Câu 3. Ở địa phương X , người ta tính toán thấy rằng: nếu diện tích khai thác rừng hàng năm không đổi như hiện nay thì sau 40 năm nữa diện tích rừng sẽ hết, nhưng trên thực tế thì diện tích khai thác rừng tăng

trung bình hàng năm là 5%/năm. Hỏi sau bao nhiêu năm nữa diện tích rừng sẽ bị khai thác hết (*làm tròn đến hàng đơn vị*)? Giả thiết trong quá trình khai thác, rừng không được trồng thêm, diện tích rừng tự sinh ra và mất đi (do không khai thác) là không đáng kể.

Câu 4. Một nhà máy sản xuất dòng drone chuyên dụng phục vụ cứu hộ. Nhà máy có công suất tối đa 400 chiếc/quý. Phòng kinh doanh đưa ra các dữ liệu tài chính cho việc sản xuất và tiêu thụ hết x chiếc drone ($x \in \mathbb{N}^*, x \leq 400$) trong một quý như sau:

+ Giá bán mỗi chiếc drone xác định theo hàm số $P(x) = 150 - 0,2x$ (đơn vị: triệu đồng/chiếc).

+ Chi phí vận hành cố định: 2 tỷ đồng/quý.

+ Chi phí linh kiện: Giá gốc 70 triệu đồng/chiếc. Nếu sản xuất trên 150 chiếc thì chi phí linh kiện cho toàn bộ lô hàng giảm xuống còn 60 triệu đồng/chiếc.

Lợi nhuận sau thuế lớn nhất trong một quý nhà máy có thể đạt được là bao nhiêu triệu đồng? (Biết thuế thu nhập doanh nghiệp là 20% tính trên lợi nhuận dương).

Câu 5. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy $AB = 2$. Biết $AB' \perp BC'$, thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng bao nhiêu (*làm tròn kết quả cuối cùng đến hàng phần trăm*)?

Câu 6. Một trạm kiểm soát không lưu sử dụng hệ thống ra-đa để theo dõi máy bay trong phạm vi bán kính 500 km. Trong hệ tọa độ $Oxyz$ (đơn vị: km), ra-đa đặt tại $O(0;0;0)$. Một máy bay đang bay tại vị trí $A(0;0;300)$ và tiếp tục bay theo hướng của vector $\vec{u} = (3;4;0)$. Giả sử máy bay bay thẳng và rời khỏi vùng theo dõi, khi đó khoảng cách từ vị trí A đến vị trí cuối cùng của máy bay xuất hiện trên màn hình ra-đa bằng bao nhiêu kilômet (*làm tròn kết quả đến hàng đơn vị*)?

----- **HẾT** -----

HƯỚNG DẪN GIẢI

Được thực hiện bởi AI Gemini Pro

PHẦN I: Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn.

Câu 1.

Phương pháp: Nhóm chứa một (nhóm yếu vị) của mẫu số liệu ghép nhóm là nhóm có tần số lớn nhất.

Lời giải: Quan sát bảng tần số ghép nhóm, ta thấy nhóm $[30; 45)$ có tần số lớn nhất bằng 18. Do đó, một của mẫu số liệu thuộc nhóm $[30; 45)$.

Chọn C.

Câu 2.

Phương pháp: Dựa vào đồ thị hàm số, giá trị cực đại là giá trị của y tại điểm cực đại của đồ thị.

Lời giải: Đồ thị hàm số đạt cực đại tại điểm $(-1; 2)$. Khi đó, giá trị cực đại của hàm số là $y = 2$.

Chọn D.

Câu 3.

Phương pháp: Sử dụng tính chất trọng tâm của tam giác. Với G là trọng tâm $\triangle BCD$, ta luôn có $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$.

Lời giải: Chèn điểm A vào biểu thức trên ta được:

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AG} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AG} \Rightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$$

Chọn B.

Câu 4.

Phương pháp: Một đường thẳng vuông góc với một mặt phẳng thì nó vuông góc với mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng đó.

Lời giải: Vì $SA \perp (ABC)$ nên SA vuông góc với tất cả các đường thẳng nằm trong mặt phẳng (ABC) , bao gồm AB , AC , và BC . Do đó các khẳng định A, C, D đều đúng. Khẳng định B sai vì trong tam giác vuông SAB tại A , đường thẳng SA không thể vuông góc với cạnh huyền SB .

Chọn B.

Câu 5.

Phương pháp: Chọn và sắp xếp thứ tự k phần tử từ n phần tử khác nhau sử dụng chỉnh hợp A_n^k .

Lời giải: Robot cần chọn lần lượt và có thứ tự 3 nút bấm khác nhau từ 6 nút bấm để tạo mã lệnh. Số mã lệnh khác nhau có thể tạo ra là:

$$A_6^3 = 6 \times 5 \times 4 = 120$$

Chọn A.

Câu 6.

Phương pháp: Mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ có bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$.

Lời giải: Từ phương trình mặt cầu ta xác định được: $a = 1, b = -2, c = 4, d = -6$. Bán kính của mặt cầu là:

$$R = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 4^2 - (-6)} = \sqrt{1 + 4 + 16 + 6} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$$

Chọn B.

Câu 7.

Phương pháp: Giải phương trình mũ cơ bản $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$.

Lời giải:

$$2^{x+3} = 2^5 \Leftrightarrow x + 3 = 5 \Leftrightarrow x = 2$$

Chọn A.

Câu 8.

Phương pháp: Sử dụng các tính chất cơ bản của tích phân xác định.

Lời giải: Với hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$, theo định nghĩa tính chất đảo giới hạn tích phân, ta luôn có:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

Chọn C.

Câu 9.

Phương pháp: Mặt phẳng $(P): Ax + By + Cz + D = 0$ có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (A; B; C)$ hoặc các vectơ cùng phương với nó.

Lời giải: Mặt phẳng $(P): 2x - 3y + z - 5 = 0$ có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_0 = (2; -3; 1)$. Đối chiếu với các phương án, ta thấy vectơ ở phương án D là $\vec{n} = (-2; 3; -1) = -\vec{n}_0$, cũng là một vectơ pháp tuyến của (P) .

Chọn D.

Câu 10.

Phương pháp: Công thức số hạng tổng quát của cấp số cộng: $u_n = u_m + (n - m)d$.

Lời giải: Ta có $u_4 = u_3 + d \Rightarrow 7 = 5 + d \Rightarrow d = 2$.

Chọn A.

Câu 11.

Phương pháp: Thể tích khối tròn xoay quanh trục Ox : $V = \int_a^b [f(x)]^2 dx$.

Lời giải: Thể tích khối tròn xoay thu được là:

$$V = \pi \int_0^4 (\sqrt{x})^2 dx = \pi \int_0^4 x dx = \pi \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^4 = \pi \left(\frac{16}{2} - 0 \right) = 8\pi$$

Chọn A.

Câu 12.

Phương pháp: Đường thẳng $y = ax + b$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số nếu $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [y - (ax + b)] = 0$.

Lời giải: Ta có $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [y - (2x + 1)] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(-\frac{1}{x + 3} \right) = 0$. Do đó, đường thẳng $y = 2x + 1$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.

Chọn B.

PHẦN II: Câu trắc nghiệm đúng sai.

Câu 1.

Lời giải chi tiết:

Theo bài ra, tại $t = 3$, tốc độ dòng tiền bằng 0 nên $f(3) = 0 \Rightarrow 3^2 + 3a + b = 0 \Rightarrow 3a + b = -9$ (1).

Tổng dòng tiền tích lũy sau 3 tháng đầu bằng 0 nên:

$$\int_0^3 f(t) dt = 0 \Leftrightarrow \int_0^3 (t^2 + at + b) dt = 0 \Leftrightarrow \left[\frac{t^3}{3} + \frac{at^2}{2} + bt \right]_0^3 = 0 \Leftrightarrow 9 + \frac{9a}{2} + 3b = 0 \Leftrightarrow \frac{3a}{2} + b = -3 \quad (2)$$

Từ (1) và (2), ta giải hệ phương trình tìm được $a = -4$ và $b = 3$. Vậy hàm tốc độ dòng tiền là $f(t) = t^2 - 4t + 3$.

Xét thời kỳ thâm hụt (khi tốc độ dòng tiền âm): $t^2 - 4t + 3 < 0 \Leftrightarrow 1 < t < 3$. Tổng số tiền bị thâm hụt trong giai đoạn này là:

$$\left| \int_1^3 (t^2 - 4t + 3) dt \right| = \left| \left[\frac{t^3}{3} - 2t^2 + 3t \right]_1^3 \right| = \left| 0 - \frac{4}{3} \right| = \frac{4}{3} \approx 1,33 \text{ (triệu đồng)} \neq 2 \text{ triệu đồng.}$$

Kết luận:

a) Sai

b) Đúng

c) Đúng

d) Đúng

Câu 2.

Lời giải chi tiết:

Hàm số $f(x) = 2 \sin x - x \Rightarrow f'(x) = 2 \cos x - 1$. Do đó ý (c) đúng.

Giải phương trình $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2}$. Trên đoạn $[-\pi; \pi]$, phương trình có đúng 2 nghiệm là $x = \pm \frac{\pi}{3}$. Do đó ý (a) đúng.

Lập bảng biến thiên trên $[-\pi; \pi]$, ta thấy hàm số đạt cực đại tại $x_1 = \frac{\pi}{3} \Rightarrow y_1 = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$ và đạt cực tiểu tại $x_2 = -\frac{\pi}{3} \Rightarrow y_2 = -\sqrt{3} + \frac{\pi}{3}$. Do đó ý (d) sai (vì điểm cực đại là $x = \frac{\pi}{3}$).

Tọa độ hai điểm cực trị là $A\left(\frac{\pi}{3}; \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right)$ và $B\left(-\frac{\pi}{3}; -\sqrt{3} + \frac{\pi}{3}\right)$. Khoảng cách giữa hai điểm cực trị:

$$AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{\left(\frac{2\pi}{3}\right)^2 + \left(2\sqrt{3} - \frac{2\pi}{3}\right)^2} \approx \sqrt{2,094^2 + 1,370^2} \approx 2,502 \approx 2,5.$$

Do đó ý (b) đúng.

Kết luận:

a) Đúng

b) Đúng

c) Đúng

d) Sai

Câu 3.

Lời giải chi tiết:

Gọi V là biến cố "Người được chọn nhiễm virus" $\Rightarrow P(V) = 0,1; P(\bar{V}) = 0,9 \Rightarrow$ ý (d) đúng.

Gọi $+$ là biến cố "Kết quả xét nghiệm dương tính". Theo bài ra: $P(+|V) = 0,95$ và $P(+|\bar{V}) = 0,05$.

Xác suất để một người có kết quả xét nghiệm dương tính là:

$$P(+) = P(V) \cdot P(+|V) + P(\bar{V}) \cdot P(+|\bar{V}) = 0,1 \cdot 0,95 + 0,9 \cdot 0,05 = 0,095 + 0,045 = 0,14 \neq 0,25 \Rightarrow \text{ý (a) sai.}$$

Xác suất xét nghiệm âm tính ($-$) biết người đó nhiễm virus là

$$P(-|V) = 1 - P(+|V) = 1 - 0,95 = 0,05 \Rightarrow \text{ý (b) đúng.}$$

Xác suất người nhiễm virus biết họ có kết quả dương tính:

$$P(V|+) = \frac{P(V \cap +)}{P(+)} = \frac{0,1 \cdot 0,95}{0,14} = \frac{0,095}{0,14} \approx 0,68 \neq 0,38 \Rightarrow \text{ý (c) sai.}$$

Kết luận:

a) Sai

b) Đúng

c) Sai

d) Đúng

Câu 4.

Lời giải chi tiết:

Tại $t = 0$, máy bay ở $M_0(12000; 0; 40)$. Tại $t = 1$, máy bay ở $M_1(11990; 20; 38)$. Vector vận tốc của máy bay mỗi giây là $\vec{v} = \overrightarrow{M_0M_1} = (-10; 20; -2)$.

Phương trình chuyển động (quỹ đạo) của máy bay theo thời gian t là:
$$\begin{cases} x = 12000 - 10t \\ y = 20t \\ z = 40 - 2t \end{cases} \Rightarrow \text{ý (c)}$$

đúng.

Tại $t = 6$, thay vào hệ phương trình ta được tọa độ máy bay là $M_6(11940; 120; 28) \Rightarrow \text{ý (a) đúng}$.

Khoảng cách từ bộ phóng $A(0; 100; 0)$ đến máy bay tại $t = 6$ tính bằng đơn vị radar:

$$AM_6 = \sqrt{(11940 - 0)^2 + (120 - 100)^2 + (28 - 0)^2} = \sqrt{11940^2 + 20^2 + 28^2} \approx 11940,05 \text{ (đơn vị)}.$$

Vì mỗi đơn vị tương ứng 10 m nên khoảng cách thực tế là $11940,05 \times 10 = 119400,5 \text{ m} \Rightarrow \text{ý (d) sai}$.

Tại $t = 6 + 30 = 36 \text{ s}$, vị trí của máy bay là $B(11640; 720; -32)$. Khoảng cách thực tế từ A đến B là $\approx 116565 \text{ m}$. Quãng đường tên lửa bay được sau 30 s là $30 \times 3200 = 96000 \text{ m} \neq 116565 \text{ m} \Rightarrow \text{ý (b) sai}$.

Kết luận:

a) Đúng

b) Sai

c) Đúng

d) Sai

PHẦN III: Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.

Câu 1.

Lời giải: Do sơ đồ rẽ nhánh đối xứng, xác suất để bóng rơi vào mỗi ô A, B, C, D trong mỗi lần thả đều bằng nhau và bằng $p = \frac{1}{4}$. Để trò chơi kết thúc ở lần thứ 6, điều kiện cần là cả 4 ô đều phải được bật sáng sau 6 lần thả, tức là số lần bóng rơi vào mỗi ô (n_A, n_B, n_C, n_D) phải là các số lẻ và tổng bằng 6. Bộ số thỏa mãn duy nhất là $\{3, 1, 1, 1\}$.

Số cách xếp chuỗi 6 lần thả có cấu trúc gồm một ô xuất hiện 3 lần và ba ô còn lại xuất hiện 1 lần là:

$$4 \times \frac{6!}{3!1!1!1!} = 480 \text{ cách.}$$

Trò chơi có thể kết thúc sớm ở lần thứ 4 nếu 4 lần đầu bóng rơi vào 4 ô khác nhau (có $4! = 24$ cách). Để sau 6 lần vẫn có cấu trúc $\{3, 1, 1, 1\}$, 2 lần cuối buộc phải rơi trùng vào cùng một ô nào đó trong 4 ô (có 4 cách). Vậy số trường hợp bị kết thúc sớm ở lần 4 là $24 \times 4 = 96$ cách.

Số cách thả hợp lệ để trò chơi kết thúc đúng ở lần thứ 6 là: $480 - 96 = 384$ cách.

Xác suất cần tìm: $P = \frac{384}{4^6} = \frac{384}{4096} = \frac{3}{32} \Rightarrow a=3, b=32 \Rightarrow a+b=35$.

Đáp số: 35

Câu 2.

Lời giải: Chọn trục Ox trùng với đường thẳng AC , gốc O tại A . Khi đó vị trí của lát cắt B có tọa độ $x \in [0; 30]$. Vì $ACDF$ là hình thang vuông tại A và C nên đoạn $BE(x)$ vuông góc với AC và giảm bậc nhất từ $AF = 12$ về $CD = 6$:

$$BE(x) = 12 - \frac{12-6}{30}x = 12 - \frac{1}{5}x$$

Đặt chiều dài đoạn này là $y_0 = BE(x)$. Tại lát cắt này, thiết diện là một phần hệ trục tọa độ phẳng có bức tường đứng $BG = BE = y_0$. Nhánh parabol (P) đi qua $G(0; y_0)$ và chân $E(y_0; 0)$. Đỉnh S của parabol có hình chiếu H nằm trên đoạn BE sao cho $SH = 2EH$. Từ tính chất hình học đối xứng của parabol, ta giải được vị trí hình chiếu đỉnh H cách B một khoảng bằng $\frac{y_0}{3}$, chiều cao đỉnh

$$SH = \frac{4y_0}{3}.$$

Diện tích thiết diện tại vị trí x được tính bằng tích phân phần diện tích dưới parabol giới hạn bởi các trục:

$$S(x) = \int_0^{y_0} \left[\frac{4y_0}{3} - \frac{3}{y_0} \left(y - \frac{y_0}{3} \right)^2 \right] dy = y_0^2 = \left(12 - \frac{1}{5}x \right)^2$$

Thể tích của đường hầm là:

$$V = \int_0^{30} \left(12 - \frac{1}{5}x \right)^2 dx = \left[-5 \cdot \frac{\left(12 - \frac{1}{5}x \right)^3}{3} \right]_0^{30} = -\frac{5}{3} (6^3 - 12^3) = 2520 \text{ (m}^3\text{)}.$$

Đáp số: 2520

Câu 3.

Lời giải: Gọi diện tích khai thác hàng năm hiện tại là A . Tổng diện tích rừng có thể khai thác là $S = 40A$.

Khi sản lượng tăng đều 5% mỗi năm, diện tích khai thác lũy tiến tạo thành một cấp số nhân với số hạng đầu là A và công bội $q = 1,05$. Tổng diện tích khai thác sau n năm là:

$$S_n = A \cdot \frac{1,05^n - 1}{1,05 - 1} = 20A(1,05^n - 1)$$

Để khai thác hết rừng thì

$$S_n = S \Leftrightarrow 20A(1,05^n - 1) = 40A \Leftrightarrow 1,05^n - 1 = 2 \Leftrightarrow 1,05^n = 3 \Leftrightarrow n = \log_{1,05}(3) \approx 22,517 \text{ (năm)}.$$

Làm tròn đến hàng đơn vị ta được 23 năm.

Đáp số: 23

Câu 4.

Lời giải: Hàm doanh thu của nhà máy thu được khi bán x chiếc drone là:

$$R(x) = x \cdot P(x) = 150x - 0,2x^2.$$

Trường hợp 1: Nếu $1 \leq x \leq 150$, chi phí linh kiện là 70 triệu/chiếc. Hàm tổng chi phí và lợi nhuận trước thuế là:

$$C_1(x) = 2000 + 70x \Rightarrow \Pi_1(x) = R(x) - C_1(x) = -0,2x^2 + 80x - 2000$$

Hàm số đạt giá trị lớn nhất tại đỉnh parabol $x = 200 \notin [1; 150]$. Vì hàm số đồng biến trên $[1; 150]$ nên LNTT lớn nhất tại $x = 150$: $\Pi_1(150) = 5500$ triệu đồng.

Trường hợp 2: Nếu $150 < x \leq 400$, chi phí linh kiện giảm xuống còn 60 triệu/chiếc cho toàn bộ lô hàng.

$$C_2(x) = 2000 + 60x \Rightarrow \Pi_2(x) = R(x) - C_2(x) = -0,2x^2 + 90x - 2000$$

Hàm số đạt cực đại tại đỉnh parabol $x = \frac{-90}{2 \cdot (-0,2)} = 225 \in (150; 400]$. Giá trị LNTT cực đại đạt được là: $\Pi_2(225) = 8125$ triệu đồng.

So sánh hai trường hợp, lợi nhuận trước thuế lớn nhất là 8125 triệu đồng. Doanh nghiệp chịu thuế thu nhập 20%, vậy lợi nhuận sau thuế lớn nhất nhà máy đạt được là:

$$\Pi_{\text{sau thuế}} = 8125 \times (1 - 20\%) = 6500 \text{ (triệu đồng)}.$$

Đáp số: 6500

Câu 5.

Lời giải: Đặt hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ cạnh đáy bằng 2, chiều cao bằng h . Chọn gốc tọa độ tại trung điểm M của BC , trục Oy trùng với BC , trục Ox đi qua A và trục Oz song song với các cạnh bên.

Tọa độ các điểm được xác định như sau: $B(0; -1; 0)$, $C(0; 1; 0)$, $A(\sqrt{3}; 0; 0)$, $B'(0; -1; h)$, $C'(0; 1; h)$.

Ta có các vectơ hướng: $\overrightarrow{AB'} = (-\sqrt{3}; -1; h)$ và $\overrightarrow{BC'} = (0; 2; h)$.

Theo giả thiết $AB' \perp BC'$ nên tích vô hướng của chúng bằng 0:

$$\overrightarrow{AB'} \cdot \overrightarrow{BC'} = (-\sqrt{3}) \cdot 0 + (-1) \cdot 2 + h \cdot h = 0 \Leftrightarrow h^2 - 2 = 0 \Rightarrow h = \sqrt{2}$$

Thể tích khối lăng trụ tam giác đều là:

$$V = S_{\triangle ABC} \cdot h = \left(\frac{2^2 \sqrt{3}}{4} \right) \cdot \sqrt{2} = \sqrt{6} \approx 2,449$$

Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm ta được 2,45 .

Đáp số: 2,45

Câu 6.

Lời giải: Vùng phủ sóng của radar là một khối cầu tâm $O(0;0;0)$, bán kính $R = 500$ km . Phương trình mặt cầu giới hạn là $x^2 + y^2 + z^2 = 250000$.

Máy bay xuất phát từ $A(0;0;300)$ bay theo hướng $\vec{u} = (3;4;0)$ có phương trình đường đi dạng tham

$$\text{số là: } \begin{cases} x = 3t \\ y = 4t \\ z = 300 \end{cases} \quad (t \geq 0) .$$

Thời điểm máy bay ra khỏi vùng phủ sóng ứng với giao điểm của đường bay và mặt cầu giới hạn:

$$(3t)^2 + (4t)^2 + 300^2 = 500^2 \Leftrightarrow 25t^2 + 90000 = 250000 \Leftrightarrow 25t^2 = 160000 \Leftrightarrow t^2 = 6400 \Rightarrow t = 80 \text{ (vì } t \geq 0 \text{)} .$$

Tại thời điểm $t = 80$, vị trí cuối cùng của máy bay trên màn hình là $M(240;320;300)$. Khoảng cách dịch chuyển từ vị trí A ban đầu đến vị trí M là:

$$AM = \sqrt{(240-0)^2 + (320-0)^2 + (300-300)^2} = \sqrt{240^2 + 320^2} = 400 \text{ (km)} .$$

Đáp số: 400

_____ **HẾT** _____